令和８年 10 月 23 日

FreeCAD による強度解析 ―最大応力の発生位置と理論値との比較 ―

１．はじめに

前回の技術トピックスでは、無料で利用できる 3 次元 CAD ソフトウェア「FreeCAD」を用いて、中央に円孔を有する鋼板の引張解析を行い、メッシュサイズが解析結果に及ぼす影響について紹介しました。

有限要素法（FEM）による強度解析では、応力分布を色で表示したり、最大応力を数値で確認したりできます。しかし、解析結果として得られた数値が妥当なものか、判断に迷うこともあるのではないでしょうか。

そこで今回は、前回と同じ円孔付き鋼板を対象として、最大応力の発生位置を詳しく調べ、材料力学の理論式による計算値と比較します。また、板厚方向の応力分布にも着目し、二次元の理論式と三次元 FEM 解析の結果の違いについて考えます。

２．解析モデルと条件

解析対象は、中央に直径 10 mm の円孔を有する鋼板です。鋼板の長手方向を X 軸、幅方向を Y 軸、板厚方向を Z 軸とし、一端を固定して反対側の端面に 20,000 N の引張荷重を加えました。座標の原点は鋼板裏面の穴の中心に取りました。

表１　解析モデルの寸法、弾性定数および境界条件

鋼板の長さ・幅・厚さ	100 mm × 40 mm × 5 mm
円孔の直径	10 mm
材料	鋼（線形弾性体）
ヤング率／ポアソン比	210 GPa ／ 0.3
引張荷重	20,000 N
拘束条件	一端の端面を固定

表２　FreeCAD のメッシュ条件と解析条件

メッシュ作成	Netgen、二次四面体要素
最大要素サイズ	5 mm
最小要素サイズ	0 mm（自動設定）
細かさ	ユーザー定義
増加率	0.30
エッジあたりのセグメント数	1
半径あたりのセグメント数	40
要素数	125,650 個
解析ソフト／ソルバー	FreeCAD 1.1.4 ／ CalculiX

3. 最大応力の発生位置

FreeCAD でフォンミーゼス応力を表示したところ、最大応力は 327.6 MPa となりました。図 1 に示す応力分布から、円孔の左右の内壁付近に応力が集中していることが分かります。

最大応力の発生位置を詳しく確認したところ、鋼板の表面ではなく、図 2 に球で示す円孔内壁の板厚中央付近で最大となっていました。三次元モデルでは、表面のコンター図だけでは分からない位置に最大応力が生じる場合があります。したがって、最大値と併せて、その発生位置も確認することが大切です。

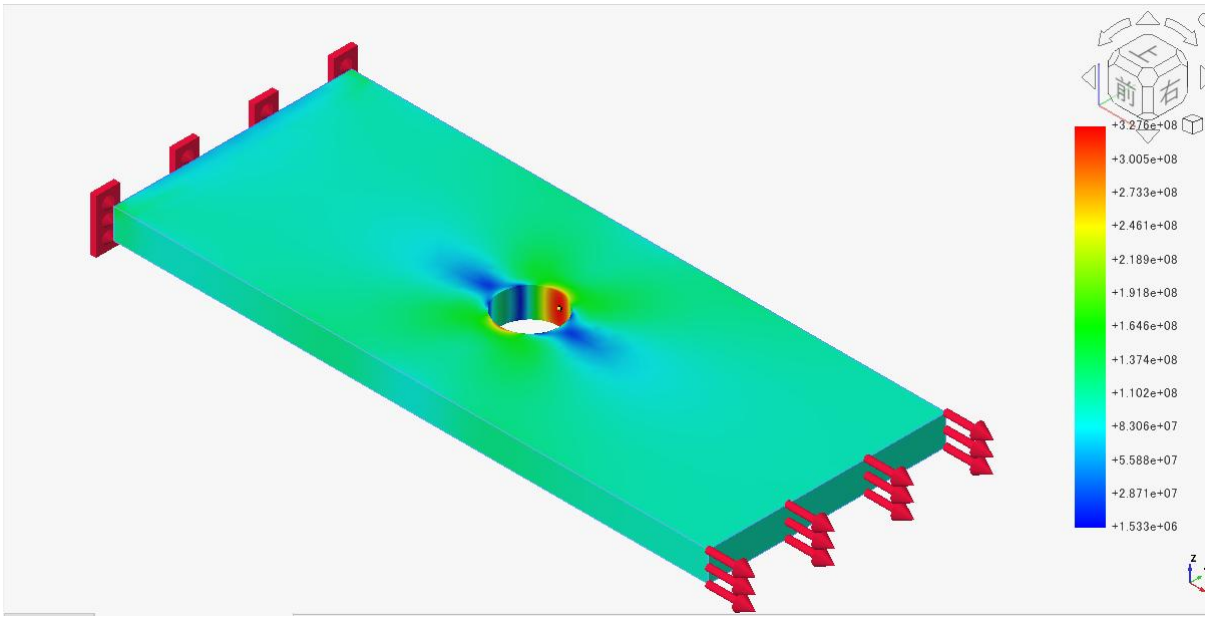


図１　フォンミーゼス応力分布

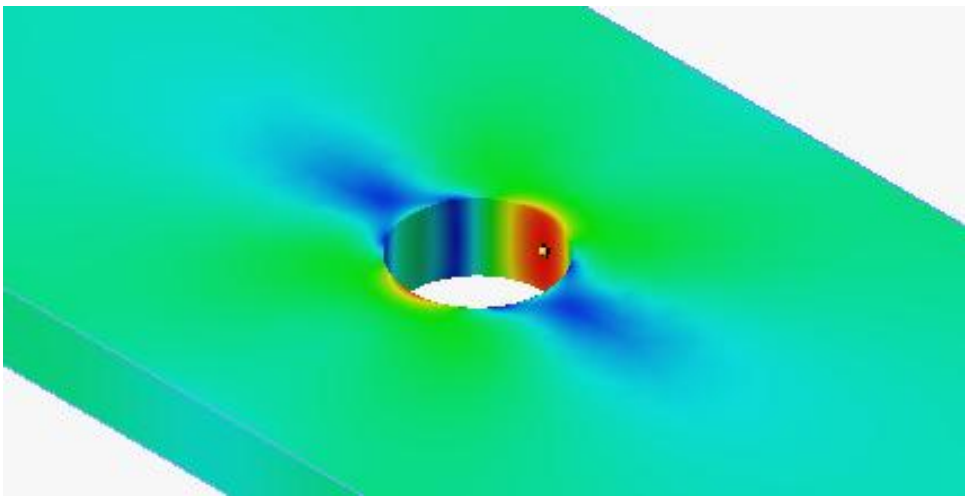


図２　円孔内壁の板厚中央付近に発生する最大応力の位置（図１の穴付近を拡大）

４．理論式による応力集中との比較

円孔を除いた最小断面における公称応力は、引張荷重 P、板幅 W、円孔直径 d、板厚 t を用いて次のように表されます。

$$\sigma_{norm} = \frac{P}{(W-d)t} = \frac{20000}{(40-10)\times 5} = 133.3\ \mathrm{MPa}$$

さて、Roark の近似式では、$\lambda = d/W$として応力集中係数 Kt を次のように表します。

$$K_t = 3.00 - 3.13\lambda + 3.66\lambda^2 - 1.53\lambda^3$$

今回の条件では $\lambda = 10/40 = 0.25$、$Kt \approx 2.42$ となります。したがって、円孔内壁に発生する最大引張応力は

$$\sigma_{\max} = K_t \times \sigma_{norm} = 323.0\ \mathrm{MPa}$$

と求まります。

ここで注意したいのは、Roark の近似式から求めた最大引張応力と、FEM 解析のフォンミーゼス応力は同じ物理量ではないという点です。今回の円孔内壁の該当位置では、引張方向の応力成分σ_{xx}が近似式で求めた応力に対応します。

FEM 解析でσ_{xx}を表示すると、最大値は 334.6 MPa となり、近似式による値 323.0 MPa より約 3.6%高い値でした。両者は比較的近い値ですが、完全には一致しません。二次元近似である Roark の式に対し、本解析は三次元応力状態を扱っているため、近似式の精度、解析モデルの境界条件やメッシュ、三次元の応力状態などが影響する可能性があります。これらの応力値をまとめたものを表 3 に示します。

表３　Roark の近似式と解析で得られた応力値の比較

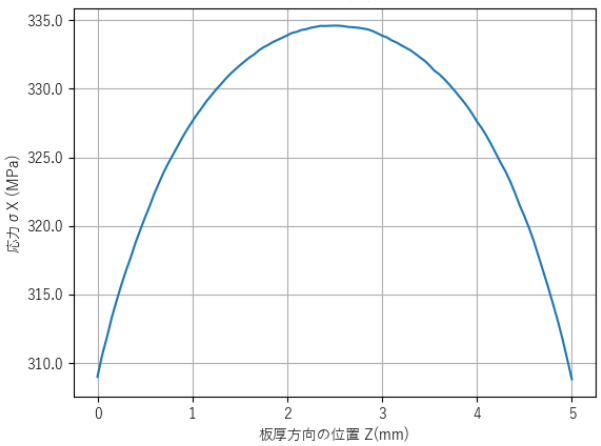
比較項目	応力（MPa）
Roark の近似式による最大引張応力	323.0
FEM 解析の最大σ_{xx}	334.6
FEM 解析の最大フォンミーゼス応力	327.6

5．板厚方向の応力分布

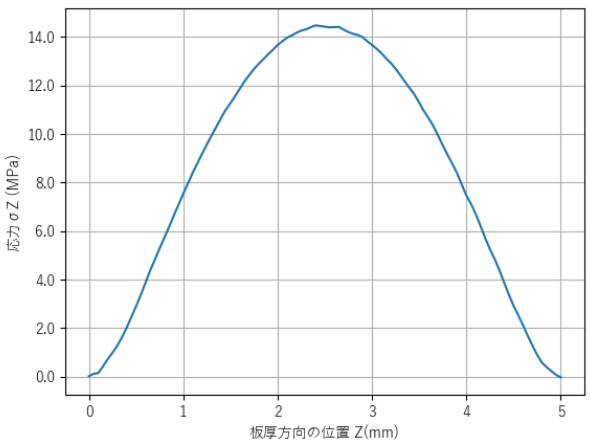
円孔内壁の X＝0 mm、Y＝5 mm において、板厚方向 Z＝0〜5 mm のσ_{xx}、σ_{zz}およびフォンミーゼス応力を調べました。結果を図 3 に示します。(a)のσ_{xx}は鋼板表面で約 309 MPa、板厚中央付近で約 334.6 MPa となり、中央で最大となりました。板厚方向に一様な応力ではないことが分かります。さらに、板厚方向の応力分布の平均値は 327.4 MPa となりました。理論値 323.0 MPa との差は約 1.4%であり、FEM 解析の最大値よりも理論値に近い値です。ただし、Roark の近似式が板厚方向の平均応力を直接求めるものではないため、この比較は参考として扱う必要があります。

(b)の板厚方向の垂直応力σ_{zz}は、鋼板表面ではほぼゼロでしたが、板厚中央では約 14.4 MPa となりました。自由表面では表面に垂直な応力がほぼゼロになる一方、内部では周囲の変形の拘束により板厚方向にも応力が生じました。

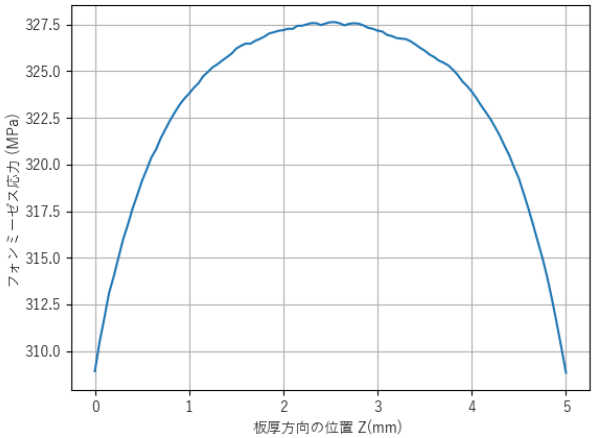
(c)のフォンミーゼス応力も板厚中央付近で最大となりましたが、その値はσ_{xx}よりやや小さくなっています。これは、フォンミーゼス応力が複数の応力成分から求められるためです。



(a) σ_{xx}



(b) σ_{zz}



(c)フォンミーゼス応力

図 3　穴の内面における板厚方向の応力分布

6．PrePoMax による解析結果との比較

解析結果を比較するため、プリ・ポストプロセッサである PrePoMax 2.6.0 でも同じモデルを解析しました。PrePoMax では、最大要素サイズ 4 mm、最小要素サイズ 0 mm、増加率 0.3、エッジあたりのセグメント数 1、半径あたりのセグメント数 40 として、二次四面体要素のメッシュを生成しました。生成されたメッシュは 111,957 要素、177,774 節点でした。最大フォンミーゼス応力は約 327.7 MPa となり、FreeCAD の 327.6 MPa とほぼ同じ値でした。最大応力の発生位置も、円孔内壁の板厚中央付近でした。応力分布を図 4 に示します。

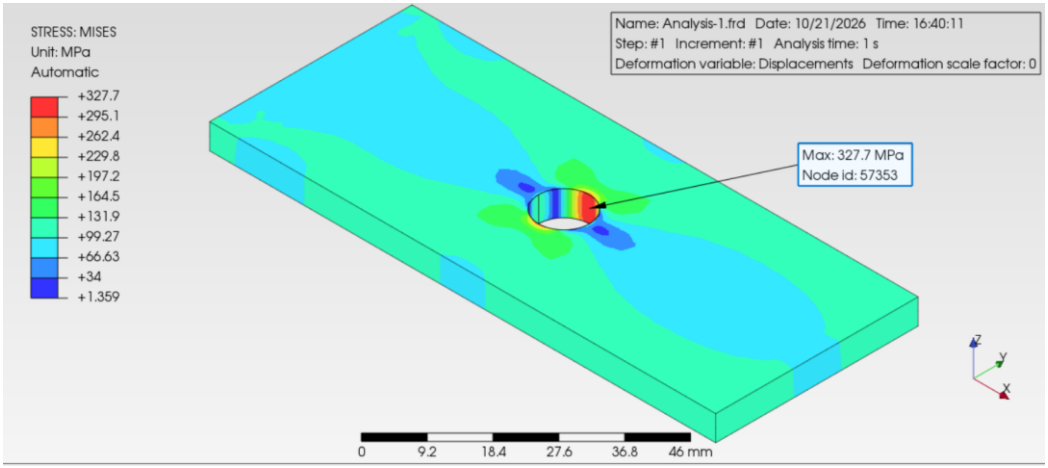


図 4　PrePoMax によるフォンミーゼス応力分布

なお、FreeCAD と PrePoMax は、いずれも解析計算に CalculiX を使用しています。そのため、異なる計算方法による完全に独立した検証ではありませんが、メッシュ生成や結果表示の異なる環境で、ほぼ同じ最大応力が得られたことが確認できました。

7．おわりに

今回は、FreeCAD を用いた円孔付き鋼板の引張解析について、最大応力の発生位置を調べ、理論式による計算結果と比較しました。最大応力は円孔内壁の板厚中央付近に発生し、理論式から求めた最大引張応力と FEM 解析の引張方向応力は比較的近い値となりました。一方、板厚方向の応力分布を調べると、表面と内部では応力値が異なり、三次元的な応力状態が生じていることも確認できました。

FEM 解析では最大応力が数値として表示されますが、その値だけで妥当性を判断することはできません。応力の種類や発生位置を確認し、理論式の適用条件やモデルの特徴を考慮しながら結果を解釈することが大切です。

参考文献

1)　Warren C. Young, Richard G. Budynas, Roark's Formulas for Stress and Strain, 7th Edition, McGraw-Hill, 2002, p.785.

問い合わせ：新潟県工業技術総合研究所
技術統括センター　斎藤 雄治
TEL：025-247-1320