新潟県工業技術総合研究所　技術トピックス

令和 8 年 10 月 26 日

片持ちはりの FEM 解析における拘束条件が最大応力に及ぼす影響

1．はじめに

有限要素法（FEM）による応力解析では、一般にメッシュを細かくすると解析精度の向上が期待できます。しかし、メッシュを細かくするほど最大応力が増加し、値が収束しないことがあります。このような現象は、形状が急激に変化する部分だけでなく、拘束条件によっても生じる場合があります。

今回は、FreeCAD を用いて片持ちはりの曲げ解析を行い、固定端の拘束条件とメッシュサイズが最大応力に及ぼす影響を調べました。また、固定端から離れるにつれて応力がどのように変化するかについても検討しました。

2．解析モデルと条件

解析には、FreeCAD 1.1.4 の FEM ワークベンチと CalculiX を使用しました。

図 1 に解析モデルと荷重条件を示します。長さ 200 mm、幅 12 mm、高さ 10 mm の直方体を片持ちはりとし、一方の端面を拘束して、もう一方の端面の上端に鉛直下向き 100 N の荷重を加えました。

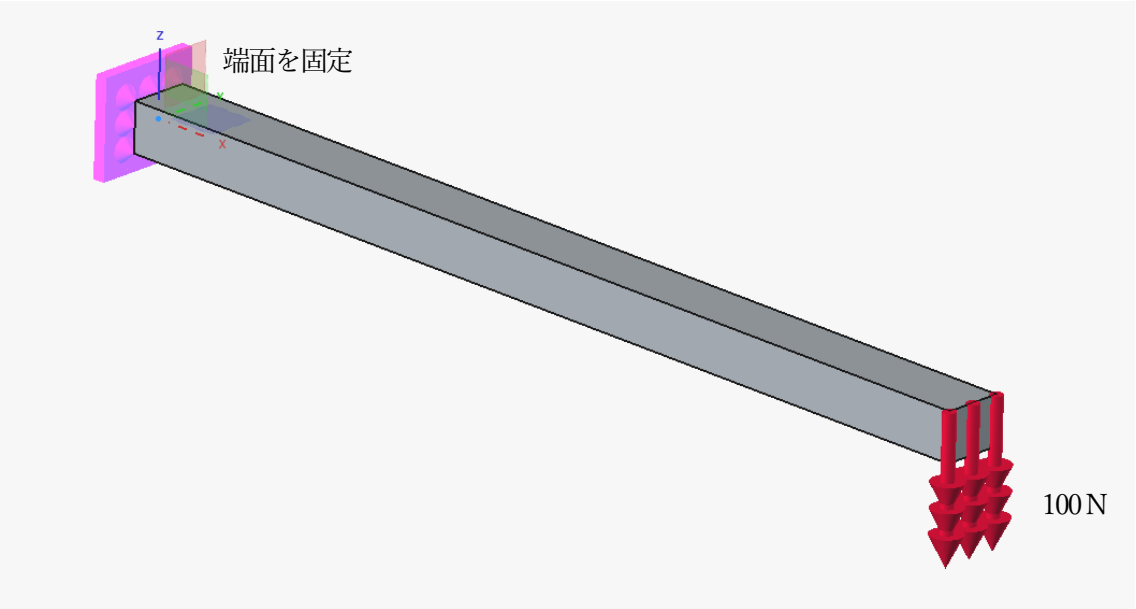


図 1　片持ちはりの解析モデルと荷重条件

材料は等方性の線形弾性体とし、ヤング率 210,000 MPa、ポアソン比 0.30 としました。メッシュには Netgen による 2 次四面体要素を使用し、最大要素サイズを 5 mm、2.5 mm、1.25 mm の 3 段階に変化させました。

さて、初等はり理論による固定端の最大曲げ応力σ_{max}は、次式で求められます。

$$\sigma_{max} = \frac{6FL}{bh^2}$$

ここで、Fは荷重、Lははりの長さ、bは幅、hは高さです。今回の条件では、最大曲げ応力は次のように 100 MPa となります。

$$\sigma_{max} = \frac{6 \times 100 \times 200}{12 \times 10^2} = 100 \text{ MPa}$$

また、自由端のたわみδは次式で求められます。

$$\delta = \frac{FL^3}{3EI}$$

ここで、Eはヤング率、Iは断面二次モーメントです。今回の断面では$I = bh^3/12 = 1000\ mm^4$となり、自由端のたわみδは$1.270\ mm$です。これらの理論値を FEM 解析結果と比較しました。

なお、座標軸は、はりの長さ方向を x、幅方向を y、高さ方向を z とし、固定端面の中心を原点としました。

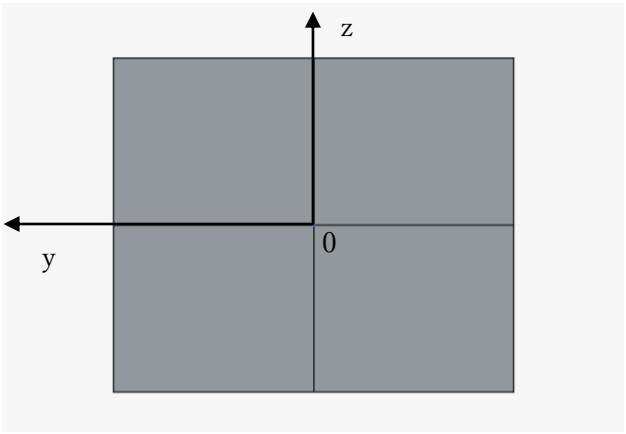
3. 固定端の拘束条件

固定端の拘束条件による違いを調べるため、表 1 に示す 4 種類の条件を設定しました。方法①は、固定端面全体の x、y、z 方向の変位をゼロとする、一般的な完全固定の条件です。一方、方法②〜④では、x 方向の変位を固定端面全体でゼロとし、y 方向と z 方向について拘束する位置を限定しました。

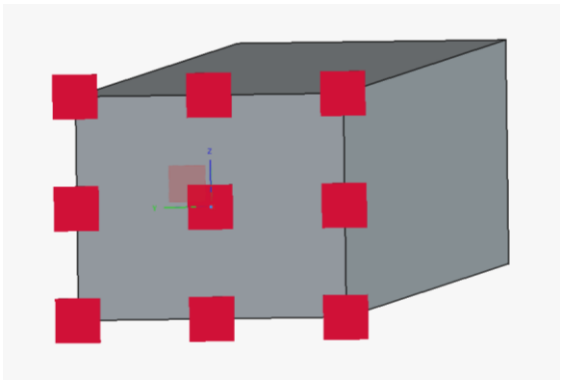
表 1　固定端の拘束条件

方法	x 方向変位	y 方向変位	z 方向変位
①	全面で 0	全面で 0	全面で 0
②	全面で 0	z=0 の線上で 0	z=0 の線上で 0
③	全面で 0	y=0 の線上で 0	y=0 の線上で 0
④	全面で 0	y=0 の線上で 0	z=0 の線上で 0

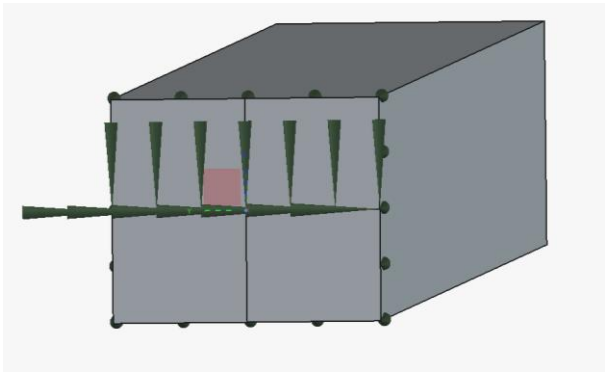
図 2 に、固定端面の分割と各拘束条件を示します。固定端面を幅方向と高さ方向の中立線で十字に分割しました。方法②〜④では、固定端面の幅方向や高さ方向の変形を部分的に許容し、応力分布への影響を比較しました。



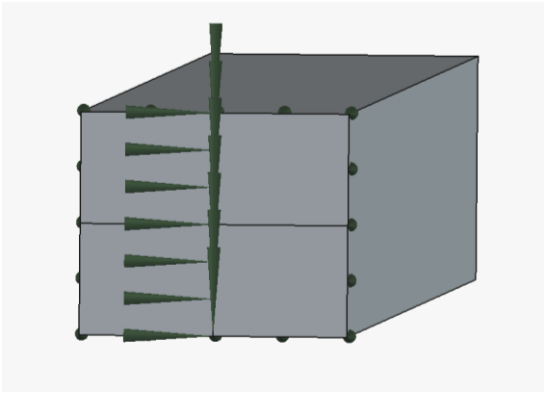
(a)固定端面の分割と座標系



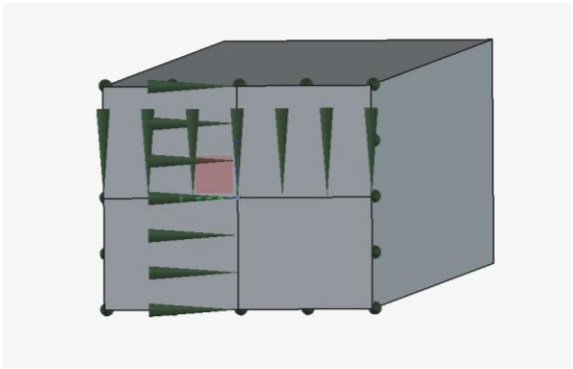
方法①



方法②



方法③



方法④

(b)拘束条件（FreeCAD の拘束状態を表示）

図２　固定端面の分割と拘束条件

４．解析結果

４－１　最大応力とメッシュサイズ

各拘束条件における、はりの長さ方向の応力σ_{xx}の最大値と最小値を表２に示します。

方法①ではメッシュを細かくするほど最大応力の絶対値が増加し、最大要素サイズ 1.25 mm で 168.48 MPa となりました。方法③でも同様の傾向が見られました。一方、方法②と④では、最大応力は約 102 MPa でほぼ一定となり、初等はり理論による 100 MPa に近い値が得られました。

表２　最大応力とメッシュサイズ

方法	メッシュサイズ（最大値、mm）	σ_{xx}の最大値 (MPa)	σ_{xx}の最小値 (MPa)
①	5	121.77	−122.39
	2.5	133.98	−134.26
	1.25	168.48	−168.45
②	5	101.63	−101.59
	2.5	101.83	−101.66
	1.25	101.70	−101.69
③	5	121.49	−116.85
	2.5	124.70	−116.47
	1.25	137.53	−134.57
④	5	101.62	−101.60
	2.5	101.83	−101.64
	1.25	101.70	−101.69

図 3 に、メッシュサイズとσ_{xx}の最大絶対値の関係を示します。最大絶対値とは、σ_{xx}の最大値と最小値のうち、絶対値が大きい方を指します。なお、図において方法②と④の値はほぼ重なっています。方法①と③では、メッシュを細かくするほど最大応力が増加しました。一方、方法②と④では約 102 MPa でほぼ一定でした。このように、同じ形状と荷重条件でも、拘束条件によって最大応力の変化が大きく異なることが分かります。

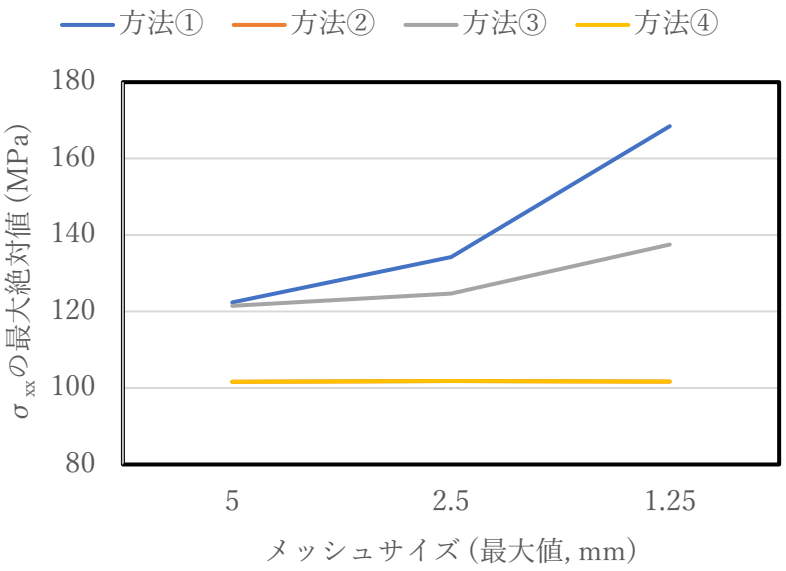
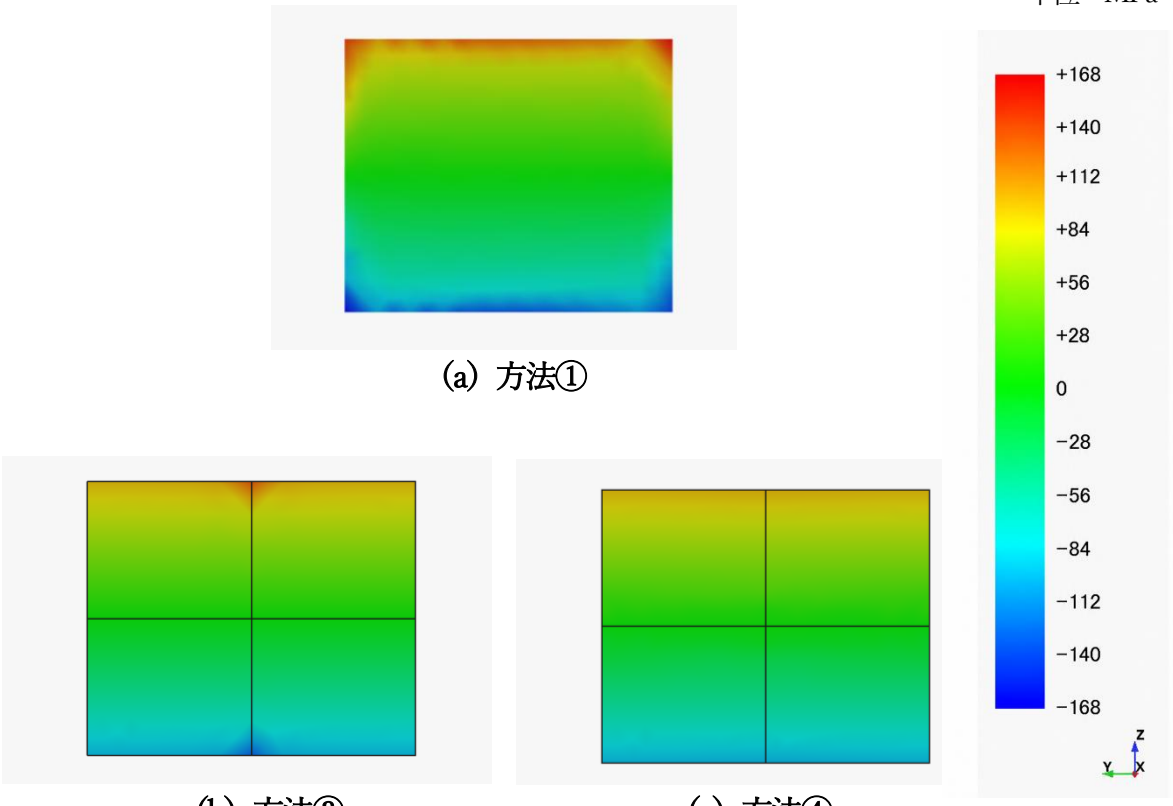


図３　メッシュサイズと最大応力の関係

4－2　固定端面の応力分布

図 4 に、最大要素サイズ 1.25 mm における固定端面の σ_{xx} の分布を示します。方法①では固定端面の四隅付近に、方法③では上下端の中央付近に局所的に高応力が発生しました。方法③で高応力が発生した位置は、z 方向の変位を拘束した線と、はりの上下表面が交わる位置に相当します。一方、方法④では、幅方向にほぼ一様で、高さ方向に滑らかに変化する応力分布が得られました。この分布は、初等はり理論による曲げ応力分布とよく一致しています。

単位：MPa



(a) 方法①

(b) 方法③　　(c) 方法④

図 4　拘束条件による固定端面のσ_{xx}分布の違い（最大要素サイズ 1.25 mm）

4－3　自由端のたわみ

最大要素サイズ 1.25 mm における自由端のたわみを表 3 に示します。方法①と④では最大応力に大きな違いがありましたが、自由端のたわみは、いずれも約 1.27 mm でした。この結果から、最大応力は拘束条件の影響を強く受けるが、全体変形量はあまり変わらない場合があることが分かります。

表 3　自由端のたわみ(mm)

はり理論値	方法①	方法④
1.270	1.27	1.27

4－4　固定端からの距離による応力の変化

次に、拘束条件の影響が固定端からどの程度離れた位置まで現れるかを調べました。方法①と④について、はりの上面中央（y＝0、z＝5 mm）に沿って、固定端から 20 mm までの σ_{xx} の変化を求めました。結果を図 5 に示します。初等はり理論では、固定端からの距離 x における曲げ応力 $\sigma_{xx}(x)$ は、次式で表されます。

$$\sigma_{xx}(x) = 100\left(1 - \frac{x}{200}\right)$$

方法①では、固定端近傍で応力が大きく変動しました。固定端から約 1〜2 mm の位置で理論値を下回った後、再び増加する挙動が見られました。一方、方法④では、固定端近傍で理論値との差がわずかに見られるものの、方法①に比べて応力の変動は小さくなりました。いずれの方法でも、固定端から離れるにつれて応力は理論値に近づき、10 mm 以上離れた位置では、ほぼ同じ値となりました。

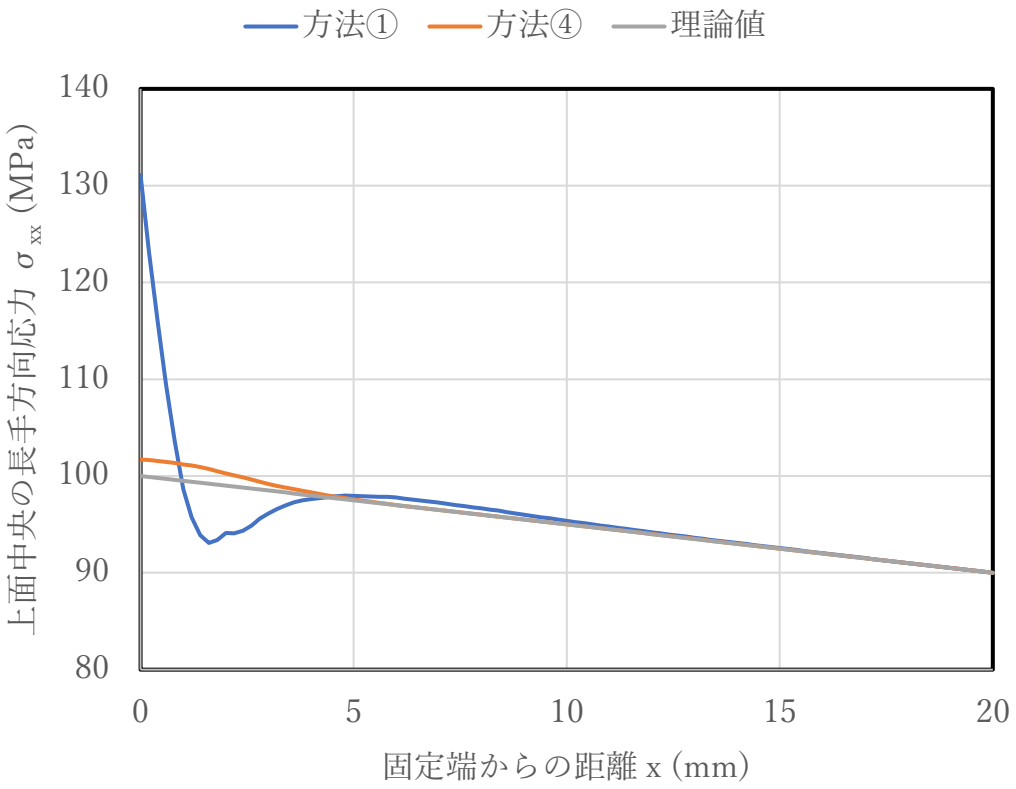


図 5　固定端からの距離による上面中央の σ_{xx} の変化（方法①と④の比較）

5．考察

方法①では固定端面の四隅付近に、方法③では上下端中央付近に局所的な高応力が発生しました。これらは、変位を拘束した部分と自由表面の境界で、変形が強く制限されたためと考えられます。また、メッシュを細かくするほど最大応力が増加しており、応力特異性の存在が示唆されます。一方、方法②と④では、横方向の変位拘束を緩和することで、局所的な高応力の発生が抑

えられ、初等はり理論に近い応力値が得られました。今回の解析条件では、方法②と④の結果に大きな差は見られませんでした。

図 5 に示すように、方法①と④では固定端近傍の応力分布が大きく異なりますが、固定端から離れるにつれて両者の応力はほぼ一致しました。これは、局所的な拘束条件の影響が、その場所から離れるにつれて小さくなるという「サンブナンの原理」と整合する結果です。今回の解析では、固定端から約 10 mm 離れると、拘束条件による応力の違いがほとんど見られなくなりました。

固定端から十分離れた位置の応力を評価する場合には、完全固定でも適切な結果が得られる場合があります。一方、固定端近傍の最大応力を評価する場合には、拘束条件によって結果が大きく変わるため、注意が必要です。

6．まとめ

片持ちはりの FEM 解析により、固定端の拘束条件とメッシュサイズが最大応力に及ぼす影響を調べました。その結果、次のことが分かりました。

1. 固定端面全体を完全拘束すると、メッシュを細かくするほど最大応力が増加した。
2. 拘束方向と拘束位置を工夫した方法②と④では、最大応力のメッシュ依存性が小さくなり、初等はり理論に近い値が得られた。
3. 拘束条件によって局所的な高応力の発生位置が異なった。
4. 最大応力が大きく異なっていても、自由端のたわみはほぼ同じ値となった。
5. 固定端近傍では拘束条件によって応力分布が異なったが、固定端から離れると、いずれも初等はり理論に近い値となった。

FEM 解析では、メッシュを細かくするだけでなく、拘束条件が解析結果に及ぼす影響を理解することが大切です。特に最大応力を評価する際には、数値だけで判断せず、その発生位置や応力分布、メッシュサイズによる変化を確認する必要があります。

なお、今回の方法②～④は、拘束条件による応力分布の違いを調べるために設定したものです。実際の構造物を解析する場合には、支持部の形状や剛性、固定方法などを考慮し、実態に合った拘束条件を設定することが重要です。

参考文献

1）水野操, 材料力学を理解して CAE を使いこなす, 2024 年, 日刊工業新聞社.

問い合わせ：新潟県工業技術総合研究所
技術統括センター　斎藤 雄治
TEL：025-247-1320